Correction de l'interrogation n° 2

Questions de cours

Se référer au cours. Dans la seconde question, ne pas oublier la loi initiale μ.

Exercice I

1. La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc la suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans $\{\cos(2k\pi/3) : k\in\mathbb{Z}\} = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$. *Ainsi, on prend* $E = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.

2. Si on s'intéresse à $\exp(2i\pi S_n/3)$, on a un triangle sur lequel notre marcheur saute en choisissant à chaque étape l'un des deux autres sommets au hasard. Un sommet est étiqueté 1, les deux autres $-\frac{1}{2}$. Ainsi, partant de 1, notre chaîne de Markov va forcément vers $-\frac{1}{2}$ mais, partant de $-\frac{1}{2}$, elle peut de façon équiprobable aller vers 1 ou $-\frac{1}{2}$. *On s'attend donc à* $Q(1,1)=0$, $Q\left(1,-\frac{1}{2}\right)=1$, $Q\left(-\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{2}$ *et* $Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Exercice II

Cet exercice étudie les propriétés des martingales bornées dans $\mathbf{L}^\infty$. La question 1 établit qu'elles jouissent de nombreuses propriétés. La question 2 montre que le théorème selon lequel toute martingale bornée dans $\mathbf{L}^p$ converge dans $\mathbf{L}^p$, valide quand $1<p<\infty$, est faux lorsque $p=\infty$. Le fait que ce théorème est faux quand $p=1$ a déjà été souligné plusieurs fois en TD.

1a. Comme (Z_n) est supposée bornée dans $\mathbf{L}^\infty$, pour tout $p\in[1,\infty[$, elle est aussi bornée dans $\mathbf{L}^p$. Pour $p>1$, cela suffit pour en déduire la convergence dans $\mathbf{L}^p$, puisque (Z_n) est une martingale.

La convergence dans $\mathbf{L}^1$ est également valide mais elle ne provient pas du théorème qu'on vient d'utiliser pour $p=1$, puisque ce théorème a besoin de prendre p dans $]1,\infty[$: plutôt, on constate qu'on a établi la convergence dans $\mathbf{L}^2$, puisque $2\in]1,\infty[$, de quoi découle la convergence dans $\mathbf{L}^1$ puisque $1\leqslant 2$.

Ainsi, (Z_n) converge dans $\mathbf{L}^p$ pour tout $p\in[1,\infty[$.

1b. Prenons notre valeur de p préférée dans l'ensemble non vide $[1,\infty[$. *La martingale (Z_n) étant bornée dans $\mathbf{L}^p$, elle converge presque sûrement.*

1c. Prenons notre valeur de p préférée dans l'ensemble non vide $]1,\infty[$. On insiste sur le fait qu'on exclut ici le choix $p=1$. *La suite de variables aléatoires (Z_n) étant bornée dans $\mathbf{L}^p$, elle est uniformément intégrable.*

2a. Soit $n\geqslant 0$. On a $\{T>n\}=\bigcap_{k=0}^n\{X_k\neq 1\}$. Or, pour tout $k\leqslant n$, on a $\{X_k\neq 1\}\in\mathscr{F}_k\subset\mathscr{F}_n$. Par stabilité par union dénombrable (ici finie), il découle que $\{T>n\}\in\mathscr{F}_n$. *Comme ceci est valable pour tout $n\geqslant 0$, la variable aléatoire T est un temps d'arrêt.*

2b. Comme M_{n+1} est à valeurs dans l'ensemble fini $\{-1,0,1\}\subset\mathbb{R}$, cette variable aléatoire est bien intégrable, ce qui légitime les calculs d'espérance conditionnelle à venir.

Traitons tout d'abord le cas où $k\leqslant n$. On a $M_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}=Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}$, qui est $\mathscr{F}_k$-mesurable comme produit de variables aléatoires qui le sont (en effet, T est un temps d'arrêt). Comme $k\leqslant n$, cela implique la $\mathscr{F}_n$-mesurabilité de $M_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}$. *Avec l'intégrabilité de cette variable aléatoire, cela donne $\mathbf{E}\left(M_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}\,|\,\mathscr{F}_n\right)=M_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}$ presque sûrement.*

Traitons désormais le cas où $k=n+1$. On a $M_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{T=n+1\}}=Y_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{T\geqslant n\}}\,\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=1\}}$. Dans cette dernière expression, le facteur $\mathbf{1}_{\{T\geqslant n\}}$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable (car T est un temps d'arrêt) et les deux autres sont indépendants de $\mathscr{F}_n$. Par conséquent, on a $\mathbf{E}\left(M_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{T=n+1\}}\,|\,\mathscr{F}_n\right)=\mathbf{E}\left(Y_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=1\}}\right)\,\mathbf{1}_{\{T\geqslant n\}}=\mathbf{E}\left(Y_{n+1}\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=1\}}\right)\,\mathbf{1}_{\{T\geqslant n\}}$, où la seconde égalité provient de l'indépendance de Y_{n+1} et X_{n+1}. *Comme Y_{n+1} est d'espérance nulle, quand $k=n+1$, on a $\mathbf{E}\left(M_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}\,|\,\mathscr{F}_n\right)=0$ presque sûrement.*

2c. Soit $n\geqslant 0$. Vérifions tout d'abord que M_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable. Pour voir cela, on écrit $M_n=\sum_{k=0}^n Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}$ et constate que le terme numéro k de cette somme est $\mathscr{F}_k$-mesurable donc $\mathscr{F}_n$-mesurable, puisque $k\leqslant n$.

L'intégrabilité se traite comme vu à la question précédente.

Enfin, on a $\mathbf{E}\left(M_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n\right)=\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n+1}Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}\,|\,\mathscr{F}_n\right)=\sum_{k=0}^{n+1}\mathbf{E}\left(Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}\,|\,\mathscr{F}_n\right)=\sum_{k=0}^{n}Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}+0=M_n$, où l'avant-dernière égalité découle de la question 2b. *Ainsi, le processus (M_n) est bien une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$.*

2d. Puisque presque sûrement, tous les Y_n sont à valeurs dans $\{-1,1\}$, il est presque sûrement le cas que les M_n sont à valeurs dans $\{-1,0,1\}$. *En particulier, on a $\sup_n\|M_n\|_\infty\leqslant 1<\infty$ donc (M_n) est bien bornée dans $\mathbf{L}^\infty$.*

Remarque : En fait, on a $\sup_n\|M_n\|_\infty=1$. Quant à la première phrase de l'argument, pour justifier que M_4 est à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, on utilise non seulement le fait que Y_4 est à valeurs dans $\{-1,1\}$ mais aussi la même propriété pour les variables aléatoires Y_0,Y_1,Y_2,Y_3.

2e. Soit $n\geqslant 0$. Considérons l'événement $\{X_0=0,\dots,X_n=0,X_{n+1}=1\}$. Par indépendance des X_k, cet événement a pour probabilité $2^{-n-2}>0$. Or sur cet événement de probabilité non nulle, on a $|M_{n+1}-M_n|=1$. Donc la quantité

$\|M_{n+1}-M_n\|_\infty$ ne peut pas tendre vers 0 puisqu'elle vaut toujours au moins 1 (en fait exactement 1). *En particulier, la suite (M_n) ne converge pas $\mathbf{L}^\infty$: en effet, si la suite convergeait vers Z dans $\mathbf{L}^\infty$, on aurait, par inégalité triangulaire,* $\|M_{n+1}-M_n\|_\infty \leqslant \|M_{n+1}-Z\|_\infty + \|M_n - Z\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Alternativement : En utilisant l'expression employée en question 2a et l'indépendance des X_k, on voit que $\mathbf{P}(T>n) = \prod_{k=0}^n \mathbf{P}(X_k \neq 1) = 2^{-n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi, T est fini presque sûrement. Par conséquent, Y_T est bien définie [1] presque partout et (M_n) converge presque sûrement vers Y_T, en stationnant à partir du rang aléatoire T. Il suffit alors de vérifier que M_n ne converge pas vers Y_T dans $\mathbf{L}^\infty$. Comme dans l'argument précédent, introduire l'événement $\{X_0=0,\dots,X_n=0,X_{n+1}=1\}$ permet de s'en rendre compte.

L'idée générale derrière le contre-exemple étudié en II-2 est la suivante. Une martingale classique est la marche aléatoire de paramètre $p=\frac{1}{2}$. Si on veut quelque chose de borné dans $\mathbf{L}^\infty$, on peut faire plus simple encore, à savoir un seul pas de cette marche. Mais c'est beaucoup trop simple pour donner lieu à un contre-exemple. Aussi, on décide d'effectuer cet unique pas à un instant T lui-même aléatoire. Visualisez bien qu'une trajectoire de (M_n), cela consiste à valoir 0 pour tout $n<T(\omega)$ puis la valeur $Y_{T(\omega)}(\omega)\in\{-1,1\}$ pour tout $n\geqslant T(\omega)$.

Bonus I Soit $n\geqslant 0$. Soient $x_1,\dots,x_n$ des éléments de $\{-1,1\}$. Calculons $\mathbf{P}(Y_{n+1}=1\,|\,X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$. Pour raccourcir, on note cette quantité $q(x_1,\dots,x_n)$.

Quand S_n est un multiple de 2π, S_{n+1} ne l'est pas, ce qui implique $Y_{n+1}=-\frac{1}{2}$. Ainsi, quand $x_1+\cdots+x_n$ est un multiple de 3, on a $\mathbf{P}(Y_{n+1}=1\,|\,X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=0$.

Traitons le cas où $x_1+\cdots+x_n$ est de la forme $3k+1$. Alors on a $q(x_0,\dots,x_n)=\mathbf{P}(X_{n+1}=-1\,|\,X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$, qui vaut $\mathbf{P}(X_{n+1}=-1)$ car les variables aléatoires X_i sont indépendantes. Par conséquent, on a $q(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{2}$.

Traitons le cas où $x_1+\cdots+x_n$ est de la forme $3k-1$. Alors on a $q(x_0,\dots,x_n)=\mathbf{P}(X_{n+1}=1\,|\,X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$, qui vaut $\mathbf{P}(X_{n+1}=1)$ car les variables aléatoires X_i sont indépendantes. Par conséquent, on a encore $q(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{2}$.

Comme $\{X_1+\cdots+X_n \text{ est un multiple de } 3\}=\{Y_n=1\}$, il résulte de ce qu'on vient de voir que $\mathbf{P}(Y_{n+1}=1\,|\,X_1,\dots,X_n)$ vaut presque sûrement $Q(Y_n,1)$, pour Q la matrice posée en question 2 de l'exercice I. On remarque que cette expression est $\sigma(Y_0,\dots,Y_n)$-mesurable.

Pour calculer $\mathbf{P}(Y_{n+1}=1\,|\,Y_0,\dots,Y_n)$, on constate que chacune des variables aléatoires $Y_0,\dots,Y_n$ est $\sigma(X_1,\dots,X_n)$-mesurable, ce qui indique que $\sigma(Y_0,\dots,Y_n)\subset\sigma(X_1,\dots,X_n)$. Cette inclusion justifie la première égalité de

$$\mathbf{P}(Y_{n+1}=1\,|\,Y_0,\dots,Y_n)=\mathbf{E}(\mathbf{P}(Y_{n+1}=1\,|\,X_1,\dots,X_n)\,|\,Y_0,\dots,Y_n)=\mathbf{E}(Q(Y_n,1)\,|\,Y_0,\dots,Y_n)=Q(Y_n,1)$$

et la dernière égalité provient de la $\sigma(Y_0,\dots,Y_n)$-mesurabilité de $Q(Y_n,1)$. On en déduit l'expression analogue

$$\mathbf{P}(Y_{n+1}=-\tfrac{1}{2}\,|\,Y_0,\dots,Y_n)=Q\left(Y_n,-\tfrac{1}{2}\right)$$

par passage au complémentaire et parce que chaque ligne de Q est de somme 1. *Ainsi, (Y_n) est bien une chaîne de Markov, de noyau de transition Q.*

Remarque : Il est essentiel dans l'argument précédent que les variables aléatoires X_i soient de loi *uniforme* sur $\{-1,1\}$: c'est cela qui fait que $\mathbf{P}(Y_{n+1}=1\,|\,X_1,\dots,X_n)$ peut s'exprimer d'une façon qui ne dépend que de Y_n — en général, on aurait une formule dépendant de S_n. Si on travaille avec un paramètre p quelconque (avec $\mathbf{P}(X_k=1)=p=1-\mathbf{P}(X_k=-1)$), il n'est plus vrai que (Y_n) est une chaîne de Markov. Par exemple, si on prend $p=1$, considérer la transition de l'instant 1 vers l'instant 2 conduit à poser $Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=1$ tandis que le passage de l'instant 2 à l'instant 3 donne $Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=0$.

Plus généralement, si (X_n) est une chaîne de Markov de noyau de transition P sur un ensemble d'états E et si $f:E\to E'$, voici une condition suffisante naturelle pour que $(f(X_n))$ soit une chaîne de Markov : on demande que pour tous x et x' dans E tels que $f(x)=f(x')$ et tout $z\in E'$, on ait $\sum_{y\in f^{-1}(\{z\})}P(x,y)=\sum_{y\in f^{-1}(\{z\})}P(x',y)$.

Bonus II Posons $Z=Y_T$, qui est bien définie presque partout d'après la correction alternative de la question 2e. Une première façon de se rendre compte que ce choix de Z convient est de dire que quand on a une martingale fermée, prendre pour Z sa limite presque sûre est toujours un choix convenable [2] (et ici, on a identifié explicitement la limite presque sûre en constatant dans la correction alternative de 2e que c'était Y_T).

Alternativement, on peut procéder comme suit. On a $Z=\sum_{k=0}^\infty Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}$. Pour $n\geqslant 0$, on a

$$\mathbf{E}\left(Z\,|\,\mathscr{F}_n\right)=\sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\left(Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}\,|\,\mathscr{F}_n\right)=\sum_{k=0}^n Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}=M_n.$$

La première égalité est licite par convergence dominée conditionnelle car $\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^\infty |Y_k|\,\mathbf{1}_{T=k}\right)=\sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}(|Y_k|\,\mathbf{1}_{T=k})=\sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}(\mathbf{1}_{T=k})=1<\infty$. L'égalité $\sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\left(Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}\,|\,\mathscr{F}_n\right)=\sum_{k=0}^n Y_k\,\mathbf{1}_{\{T=k\}}$ s'obtient, elle, par le même raisonnement qu'en question 2c.

1. Jusqu'à maintenant, on n'avait pas besoin d'avoir conscience de cela. En effet, quand on définit M_n, on n'a besoin de définir Y_T que sur l'événement $\{T\leqslant n\}$, et sur cet événement la définition ne pose aucun problème.

2. Attention, même à égalité presque partout près, ce n'est pas le seul choix convenable. Si Z convient, alors Z' conviendra si et seulement si Z et Z' ont même espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathscr{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n\right)$.